Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**,

Ημ/νία: 20 Μαΐου 2013

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 28

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 148

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 87

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - 1^2}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(-1)\left(\sqrt{(-1)^2-1+1}+1\right)} = \frac{1}{4}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \left(\frac{x}{3}\right)(\ln x)' = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3}$$

Επομένως: $P(\omega_3) = f'(1) = \frac{\ln 1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Β2. Έχουμε ότι: $\{\omega_1\} \subseteq A \Rightarrow P(\omega_1) \le P(A) \Rightarrow$

$$P(\omega_1) \le 1 - P(A')$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le 1 - P(A') \Leftrightarrow P(A') \le 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{P(A') \le \frac{3}{4}} \quad (\mathbf{1})$$

Επίσης:

$\{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \leq P(A') \;\; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq P(A') \;\; (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) τελικά παίρνουμε: $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$

Β3. Είναι: $P(A') = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{1}{4}$

$P(\omega_1) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{4} + P(\omega_4) = \dfrac{1}{4}$

$P(\omega_4) = 0$.

Επίσης $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} P(\omega_i) = 1 \;\Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + P(\omega_2) + \dfrac{1}{3} + 0 = 1 \;\Leftrightarrow P(\omega_2) = 1 - \dfrac{7}{12}$

$\Leftrightarrow P(\omega_2) = \dfrac{5}{12}$

Οπότε $P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{12}$

και $P(A \cap B) = P(\omega_1) = \dfrac{1}{4}$

Ακόμη: $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{12} - 2 \cdot \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{1}{3}$

β' τρόπος:

Είναι: $A - B = \{\omega_4\}$

$B - A = \{\omega_3\}$ δηλαδή $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3\}$

Οπότε $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) = \dfrac{1}{3}$.

Είναι: $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$, $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

Οπότε $A' - B' = \{\omega_3\}$ και $P(A' - B') = P(\omega_3) = \dfrac{1}{3}$

Αλλιώς: $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A = \{\omega_3\}$

$P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Σχόλιο: Οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν και τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων:

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') = P(A') - P[(A \cup B)'] \\ &= 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) \\ &= -P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Κλάσεις $[\alpha, \beta)$	**κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετικές συχνότητες** f_i
$[50, 50 + c)$	x_1	f_1
$[50 + c, 50 + 2c)$	x_2	f_2
$[50 + 2c, 50 + 3c)$	x_3	f_3
$[50 + 3c, 50 + 4c)$	$x_4 = 85$	$f_4 = 2f_3$
		1

Ισχύει: $x_4 = \frac{(50 + 3c) + (50 + 4c)}{2} \Leftrightarrow 85 = \frac{100 + 7c}{2}$

$$\Leftrightarrow 170 = 100 + 7c$$

$$\Leftrightarrow 7c = 70$$

$$\Leftrightarrow c = 10$$

Γ2. Εφόσον η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι $\delta = 75$ ισχύει:

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{f_3}{2} + f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 \quad (1)$$

Επίσης: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f_4 + f_3 + f_4 = 1$$

$\Leftrightarrow f_3 + 2f_4 = 1$

$\Leftrightarrow 5f_3 = 1$, αφού $f_3 = 0{,}2$

Επομένως: $f_4 = 0{,}4$ και από την (1) παίρνουμε $f_1 + f_2 = 0{,}4$ (3)

Με τα δεδομένα αυτά ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις $[\alpha, \beta)$	**κεντρικές τιμές x:**	**σχετικές συχνότητες f_i**	$x_i \cdot f_i$
[50,60)	55	$f_1 = 0{,}1$	$55 \cdot f_1$
[60,70)	65	$f_2 = 0{,}3$	$65 \cdot f_2$
[70,80)	75	0,2	15
[80,90)	85	0,4	34
		1	

Οπότε για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Leftrightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 15 + 34 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 55 \cdot f_1 + 65 \cdot (0{,}4 - f_1) = 25$$

$$\Leftrightarrow 55f_1 - 65f_1 + 26 = 25 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = 0{,}1$$

Τελικά: $f_2 = 0{,}4 - f_1 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}3$

Γ3. Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 έχουμε:

x_i	f_i	v_i
55	0,1	$0{,}1v$
65	0,2	$0{,}3v$
75	0,3	$0{,}2v$
85	0,4	$0{,}4v$

Επειδή οι σχετικές συχνότητες τροποποιούνται στο νέο δείγμα έχουμε τον νέο πίνακα:

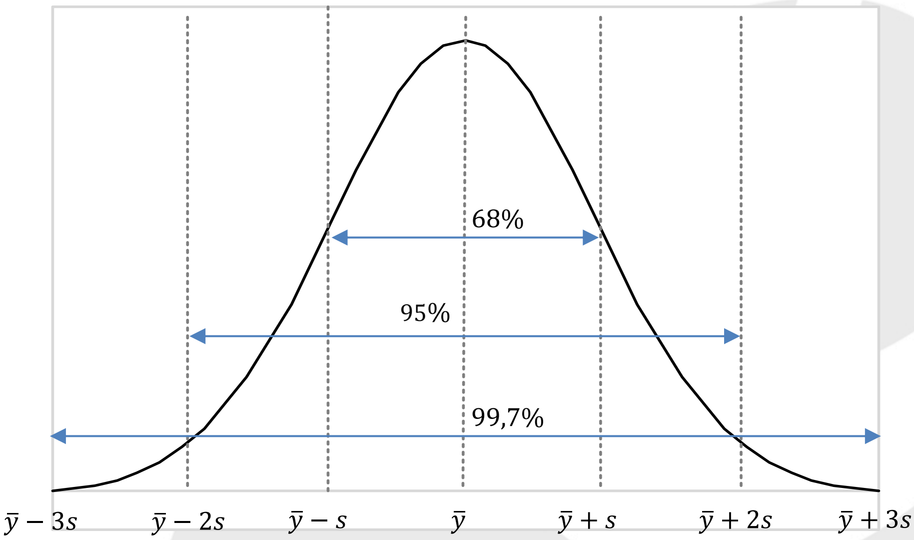
x_i	v_i
55	$0{,}1v$
65	$0{,}3v$
75	$0{,}2v$
85	$0{,}4v$

$$\bar{x} = \frac{1}{0{,}6\nu}\sum_{i=1}^{3} x_i \nu_i = \frac{1}{0{,}6\nu}\,(0{,}1\nu \cdot 55 + 0{,}3\nu \cdot 65 + 0{,}2\nu \cdot 75)$$

$$= \frac{1}{6}(55 + 3 \cdot 65 + 2 \cdot 75)$$

$$= \frac{55 + 195 + 150}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Για την κανονική κατανομή έχουμε:



Ισχύουν: $\bar{y} + 2s = 75$ και $\bar{y} - s = 68$.

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $s = 2$ και $\bar{y} = 70$.

Συνεπώς: $CV = \frac{s}{\bar{y}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$ και το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $f(1) = k$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = lnx + 1$ και $f'(1) = 1$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f έχει εξίσωση:

$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = f'(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$

$(\varepsilon): y = x + \beta$

Ακόμα: $A\big(1, f(1)\big) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \kappa = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \kappa - 1 \quad (1)$

Άρα (ε): $y = x + \kappa - 1$ (2)

Για $y = 0$ η (2) δίνει: $x = 1 - \kappa$ δηλαδή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(1 - \kappa, 0)$

Για $x = 0$ η (2) δίνει: $y = \kappa - 1$ δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, \kappa - 1)$

Για το εμβαδό του τριγώνου με τους άξονες ισχύει:

$$E = \frac{(OB) \cdot (O\Gamma)}{2} = \frac{|1 - \kappa||\kappa - 1|}{2} = \frac{(\kappa - 1)^2}{2}$$

Επειδή: $E < 2$, έχουμε:

$\frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow \kappa < 3$

Αφού $\kappa > 1$, με $k \in \mathbb{Z}$ θα είναι: $\kappa = 2$ οπότε από την (1) προκύπτει: $\beta = 1$.

Δ2. Η εξίσωση εφαπτομένης στο $A\big(1, f(1)\big)$ είναι: (ε): $y = x + 1$

Ισχύει: $\bar{y} = 31$ όπου $y_i = x_i + 1$ για $i = 1, \dots 50$

Αφού σε κάθε παρατήρηση προστίθεται ο ίδιος αριθμός $c = 1$ ισχύει:

$\bar{x} + 1 = 31 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$.

Για τις νέες παρατηρήσεις ισχύει:

$z_i = x_i + 3, i = 1, \dots 20$

$z_i = x_i \ , i = 21, \dots 35$

$z_i = x_i - \lambda, i = 36, \dots 50$

Οπότε:

$$\bar{z} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} z_i = \frac{1}{50} \left(\sum_{i=1}^{20} z_i + \sum_{i=21}^{35} z_i + \sum_{i=36}^{50} z_i \right)$$

$$= \frac{1}{50} \left[\sum_{i=1}^{20} (x_i + 3) + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} (x_i - \lambda) \right]$$

$$= \frac{1}{50} \left(3 \cdot 20 + \sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} x_i - 15\lambda \right)$$

$$= \frac{1}{50}\left(60 - 15\lambda + \sum_{i=1}^{50} x_i\right)$$

$$= \frac{1}{50}(60 - 15\lambda + 50 \cdot \bar{x})$$

$$= \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\lambda + 30$$

Αλλά

$$\bar{z} = 31 \ \Leftrightarrow 30 + \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\lambda = 31 \Leftrightarrow \frac{3}{10}\lambda = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Έχουμε ότι:

$f(\alpha) = \alpha \ln \alpha + 2$,

$f(\beta) = \beta \ln \beta + 2$,

$f(\gamma) = \gamma \ln \gamma + 2$,

και $f(e) = e + 2$.

Επίσης:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \ \text{ γιατί } \ f'(x) = \ln x + 1$$

Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘		↗	

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}\ ,\ e\right]$ ισχύει $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2$

Ακόμη:

$$\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma}\right) = \ln e^7$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha} + \ln \beta^{\beta} + \ln \gamma^{\gamma} = 7 \ln e$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7$$

Για τη μέση τιμή ισχύει:

$$\bar{x} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{a \ln a + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma + e + 8}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{15 + e}{5}$$

Δ4. Έστω (η) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(t\,, f(t))$. Επειδή η (η) σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$ πρέπει:

$$\lambda_\eta > 0 \Leftrightarrow f'(t) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln t + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln t > -1$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$$

οπότε: $A = \{t_{11}\,, t_{12}\,, \dots, t_{30}\}$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Για το B παίρνουμε:

$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow 2 + t \ln t > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow t \ln t > \ln t \Leftrightarrow$

$(t-1) \cdot \ln t > 0 \Leftrightarrow \quad t \neq 1.$

Οπότε το ενδεχόμενο B είναι:

$B = \{t_1\,, t_2\,, \dots, t_{29}\}$ δηλαδή

$A \cap B = \{t_{11}\,, t_{12}\,, \dots, t_{29}\}$

και $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$

Επιμέλεια:
Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Δημήτρης Κότσιρας, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη